

直径为 3 的图的上可嵌入性

刘端凤^{1,2}, 肖 莉²

(1. 广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006 2 中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 证明了如下结果: 设 G 是直径为 3 的简单图, 若 G 不含 3 阶完全子图 K_3 , 则 G 的 Betti 亏数 $\xi(G) \leq 1$, 即 G 是上可嵌入的.

关键词: 简单图; 直径; Betti 亏数; 上可嵌入; 最大亏格

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)03-0040-03

1 引言及基本定理

本文所考虑的图均为有限无向的连通图. 一个图如果不含重边和环, 则称之为简单图. 其他有关图的术语可参见文献[1]. 设 $A \subseteq E(G)$ 为图 G 的一个边子集, 记号 $c(G \setminus A)$ 表示 $G \setminus A$ 的所有连通分支个数; 而记号 $b(G \setminus A)$ 表示具有圈秩数为奇数的 $G \setminus A$ 的所有连通分支个数. 若 T 为图 G 的一棵生成树, $G \setminus E(T)$ 的一个连通分支 K 称为 G 的关于 T 的奇边分支, 如果 K 的边数为奇数; 否则 K 称为偶边分支. 记号 $\xi(G, T)$ 表示 $G \setminus E(T)$ 的边数为奇数的连通分支个数. 称 $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$ 为 G 的 Betti 亏数^[2], 其中 $\min$ 取遍 G 的所有生成树 T . 设 u 和 v 为图 G 的任意两点, u 和 v 之间的距离记为 $d_G(u, v)$, 是 G 中连结 u 和 v 之间最短路的长度. 一个图 G 的直径记为 $d(G)$, 是 G 中所有两点之间距离的最大者.

曲面, 这里指一个连通紧致 2- 维闭流形. 一个图 G 在曲面 S 上的一个开 2- 胞腔嵌入是指存在一个 $1-1$ 连续映射 $\varphi: G \rightarrow S$ 使得 $S \setminus \varphi(G)$ 的每个连通分支与开圆盘拓扑同胚. 此时, $S \setminus \varphi(G)$ 的每个连通分支称为 G 在 S 上的一个面 (关于嵌入 φ). 一个图的最大亏格记为 $\gamma_M(G)$, 是指那些 G 可嵌入的可定向曲面亏格之最大者. 设图 G 能 2- 胞腔嵌入亏格为 $g(S)$ 的定向曲面 S 上, 用 $V(G)$ 、 $E(G)$ 和 $F(G)$ 分别表示 G 的点集、边集和面集, 则有 Euler 公式: $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2g(S)$, 因为一个图 G 在任意定向曲面的 2- 胞腔嵌入中至少有一个面, 易得到 G 的最大亏格满足

$$\gamma_M(G) \leq \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor,$$

其中 $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 称为图 G 的圈秩数 (或 Betti 数) (对任意实数 x , $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数). 同时, 若 $\gamma_M(G) = \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor$, 则称图 G 是上可嵌入的. 联系着图的圈秩数和 Betti 亏数, 文献[2-3]给出了与图的最大亏格有关的两个重要定理:

定理 1^[2] 设 G 为图,

$$1) \gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G));$$

$$2) G \text{ 是上可嵌入的当且仅当 } \xi(G) \leq 1$$

定理 2^[3] 设 G 为图, 则 $\xi(G) = \max_{A \subseteq E(G)} \{c(G \setminus A) + b(G \setminus A) - |A| - 1\}$.

2 引理及主要结果

图的最大亏格以及相关的上可嵌入性是拓扑图论中主要研究问题之一, 这一课题的研究一直引起许多图论学者的广泛兴趣. 结合图的一个或多个参数, 许多文献都给出了若干上可嵌入图类, 或给出了一些图类的最大亏格的较好下界, 特别地, 关于图的直径与最大亏格下界的关系, 近年来引起了学者的重视. 文献[4-5]用不同的方法考虑了直径为 2 的情况, 即

引理 1 设 G 是直径为 2 的无环图, 则 $\xi(G) \leq 1$, 即 G 是上可嵌入的.

文献[6]进一步考虑了直径为 3 的情形, 证明了如下引理:

引理 2 设 G 是直径为 3 的无环图, 则 $\xi(G) \leq 2$, 即 $\gamma_M(G) \geq \frac{1}{2}\beta(G) - 1$.

收稿日期: 2007-10-29

基金项目: 广东工业大学校青年基金资助项目 (062060)

作者简介: 刘端凤 (1976-), 女, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为图论及其应用、计算机辅助几何设计.

本文在此基础上, 对直径为 3 的简单图进行限制, 得到了如下的结果:

定理 (主要结果) 设 G 是直径为 3 的简单图, 若 G 不含 3 阶完全子图, 则 $\xi(G) \leq 1$, 即 G 是上可嵌入的.

3 主要结果的证明

首先给出一个引理

关于一个非上可嵌入图, 文献 [7] 得到了如下结果:

引理 3 设 G 为图, 若 $\xi(G) \geq 2$ 即 G 不是上可嵌入的, 则存在 G 的边子集 A , 满足下列性质:

1) $c(G \setminus A) \geq 2$ 且对 $G \setminus A$ 的任意连通分支 F , 有 $\beta(F) \equiv 1 \pmod{2}$;

2) 对 $G \setminus A$ 的任意连通分支 F , F 是 G 的点导出子图;

3) 对 $G \setminus A$ 的任意 $k (\geq 2)$ 个不同连通分支 $F_1, F_2, \dots, F_k$, 则有 $|E_G(F_1, F_2, \dots, F_k)| \leq 2k - 3$ 特别地, 当 $k = 2$ 时, $|E_G(F_1, F_2)| \leq 1$;

4) $\xi(G) = 2c(G \setminus A) - |A| - 1$

定理的证明 若 G 是上可嵌入的, 即 $\xi(G) \leq 1$, 则结论显然成立. 因此以下假定 G 不是上可嵌入的, 即 $\xi(G) \geq 2$ 由引理 3 知, 存在 G 的边子集 A 使得 $G \setminus A$ 满足引理 3 的所有性质 1) ~ 4). 下面约定如下记号:

对任意集合 X , $|X|$ 表示 X 的基数;

用 Φ 表示 $G \setminus A$ 的所有连通分支组成的集合, 此时为了方便, 把 Φ 中的元素与 $G \setminus A$ 的连通分支无区别地看待;

对于任意 $F \in \Phi$, $E(F, A)$ 表示 G 中一个端点在 F 中而另一个端点不在 F 的边集;

对于 Φ 的任意两个不交子集 Φ_1 和 Φ_2 , $E(\Phi_1, \Phi_2) = \{e \mid e \in E(G) \text{ 且存在 } F_1 \in \Phi_1 \text{ 和 } F_2 \in \Phi_2, \text{ 使得 } e \text{ 的两个端点分别在 } F_1 \text{ 和 } F_2 \text{ 中}\}$; 对任意 $\Phi' \subseteq \Phi$ 且 $|\Phi'| \geq 2$, $\tilde{E}_{\Phi'} = \{e \mid e \in E(G) \text{ 且存在 } F, H \in \Phi', \text{ 使得 } e \text{ 的两个端点分别在 } F \text{ 和 } H \text{ 中}\}$;

由引理 3 的性质 3), 对任意 F, H , 则有 $|E(\{F\}, \{H\})| = |\tilde{E}_{\{F, H\}}| \leq 1$ 若有边 e 为 $E(\{F\}, \{H\})$ (或 $\tilde{E}_{\{F, H\}}$) 中的元素, 则称 F 和 H 是 1-相邻的且 e 是连结 F 和 H 的边. 把 Φ 中的元素具有引理 3 的性质 3) 称为 Φ 具有 1-相邻性.

因 Φ 具有 1-相邻性, 对任意 $F \in \Phi$, 若 $|E(F, A)| = k$ 则 Φ 中必有 k 个不同的元素与 F 是 1-相

邻. 又由引理 3 的性质 2) 知, $e \in A$ 当且仅当 e 的两个端点分别在 Φ 的两个不同的元素中, 因此 $|A| =$

$|\tilde{E}_{\Phi}| = \frac{1}{2} \sum_{F \in \Phi} |E(F, A)|$. 有如下断言:

断言 1 必存在某个 $F \in \Phi$ 使得 $1 \leq |E(F, A)| \leq 3$

证: 由引理 3 的性质 1), $|\Phi| \geq 2$ 若对任意 $F \in \Phi$, 均有 $4 \leq |E(F, A)|$, 则 $|A| = \frac{1}{2} \sum_{F \in \Phi} |E(F, A)| \geq 2|\Phi|$. 再由引理 3 的性质 4) 得: $\xi(G) = 2|\Phi| - |A| - 1 \leq -1$ 这与 $\xi(G) \geq 2$ 假设矛盾. 因此存在 $F \in \Phi$ 使得 $|E(F, A)| \leq 3$ 又因 G 是连通的, 必有 $|E(F, A)| \geq 1$

断言 2 对于任意 $F \in \Phi$ 以及任意点 $u \in V(F)$, 必存在点 $v \in V(F)$ 使得 $u \neq v$ 且 $uv \notin E(G)$.

证: 由引理 3 性质 1) 知, $\beta(F)$ 为奇数. 因 G (从而 F) 是简单的, 以及由引理 3 性质 2) 知: F 为 G 的点导出子图, 假若对 $V(F)$ 中的所有点 v 均有 $uv \in E(G)$, 则 G 中必含有 3 阶完全子图 K_3 . 这与定理条件矛盾.

断言 3 对任意 $F \in \Phi$, $|V(F)| \geq 4$

证: 若 $|V(F)| \leq 3$ 因 $\beta(F)$ 为奇数 (由引理 3 性质 1)), 这必将导致 F (从而 G) 中含有重边或环或 3 阶完全子图. 这与定理条件矛盾.

由上断言 1, 存在 $F \in \Phi$ 使得 $1 \leq |E(F, A)| \leq 3$ 现在分别考虑以下情况:

情况 1 若 $|E(F, A)| = 1$ 记 $E(F, A) = \{e\}$. 设 $H \in \Phi$ 是 F 的 1-相邻的, 且记 $e = fh$ 为连结 F 和 H 的边, 其中 $f \in V(F)$, $h \in V(H)$. 由断言 2 分别存在点 $f^* \in V(F)$ 以及 $h^* \in V(H)$ 使得 $f \neq f^*$ 且 $ff^* \notin E(G)$ 以及 $h \neq h^*$ 且 $hh^* \notin E(G)$. 注意到 e 是 G 的一条割边, 因此必有 $d_G(f^*, h^*) \geq 5$ 这与 $d(G) = 3$ 矛盾.

情况 2 若 $|E(F, A)| = 2$ 记 $E(F, A) = \{e_1, e_2\}$. 设 H_1, H_2 是与 F 1-相邻的 2 个连通分支. 记 $e_i = f_i h_i (i = 1, 2)$, 其中 $f_i, h_i \in V(F)$ (不排除 f_1, f_2 重合), $h_i \in V(H_i)$. 由断言 3 $|V(F)| \geq 4$ 因此存在 $f^* \in V(F)$ 使得 $f^* \neq f_i (i = 1, 2)$. 同时, 有 $|V(H_i)| \geq 4$ 且在 $V(H_i)$ 中至少存在一个点 h_i^* , 使得 $h_i^* h_i \notin E(G)$, ($i = 1, 2$), 下面考虑在 G 中, h_i^* 到 f^* 的最短路径 $P_G(h_i^*, f^*)$. 因为 $d_G(f^*, h_i) \geq 2$ 且 $d(G) = 3$ 所以 $P_G(h_i^*, f^*)$ 必是如下形式: $h_i^* h_j f f^*$, 其中 $i \neq j$ ($i, j = 1, 2$). 于是 $d_G(h_i^*, f^*) = 3$ 但此时 $|E(H_1, H_2)| \geq 2$ 这与引理 3 的性质 3) 矛盾.

情况 3 若 $|E(F, A)| = 3$ 记 $E(F, A) = \{e_1, e_2, e_3\}$. 设 H_1, H_2, H_3 是与 F 1 相邻的 3 个连通分支记 $e_i = f_i h_i (i = 1, 2, 3)$, 其中 $f_1, f_2, f_3 \in V(F)$ (不排除 f_1, f_2, f_3 中有重合点), $h_i \in V(H_i)$, 由断言 3 $|V(F)| \geq 4$ 因此存在 $f^* \in V(F)$ 使得 $f^* \neq f_i (i = 1, 2, 3)$. 同时有 $|V(H_i)| \geq 4$ 且在 $V(H_i)$ 中至少存在一个点 h_i^* , 使得 $h_i^* h_i \in E(G), (i = 1, 2, 3)$. 下面考虑在 G 中, h_i^* 到 f^* 的最短路径 $P_G(h_i^*, f^*)$. 因为 $d_G(f^*, h_i) \geq 2$ 且 $d(G) = 3$ 所以 $p_G(h_i^*, f^*)$ 必是如下形式: $h_i^* h_i f_j f^*$, 其中 $i \neq j (i, j = 1, 2, 3)$. 于是 $d_G(h_i^*, f^*) = 3$ 但此时 $|E(F, H_1, H_2, H_3)| \geq 6 > 2 \times 4 - 3$ 这与引理 3 的性质 3) 矛盾.

综上所述, 对于任意的 $F \in \Phi$ 都有 $|E(F, A)| \geq 4$ 此时有 $|A| = |\tilde{E}_\Phi| = \frac{1}{2} \sum_{F \in \Phi} |E(F, A)| \geq \frac{1}{2} \times 4c(G \setminus A) \geq 2c(G \setminus A)$, 从而 $\xi(G) = 2c(G \setminus A) - |A| - 1 \leq 2c(G \setminus A) - 2c(G \setminus A) - 1 \leq -1$ 这与题设矛盾. 故所给的定理成立.

下面, 用具体的例子来说明, 定理中的条件“ G 不含 3 阶完全子图”是必要的, 如图 1

在 G 中, 取 $A = \{e_1, e_2, e_3\}$, 这里 $A \subseteq E(G)$, 由定理 2 容易得到 $\xi(G) \geq \{c(G \setminus A) + b(G \setminus A) - |A| - 1\} = 3 + 3 - 3 - 1 = 2$ 取 T 为 G 的一棵树, 其中 $E(T) = \{E(G) \setminus \{f_1, e_1, f_2, f_3\}\}$, $V(T) = V(G)$, 此时 $\xi(G, T) = 2$ 由 Betti 亏数的定义知, $\xi(G) \leq 2$ 故 $\xi(G) = 2$

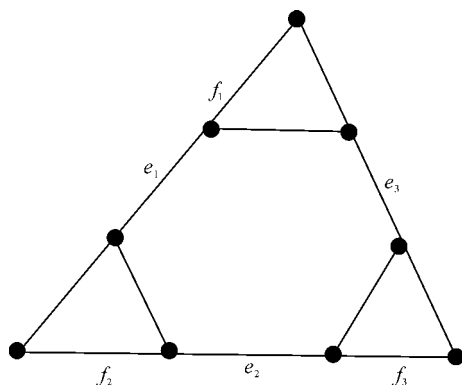


图 1 G 以及它的一个平面嵌入

参考文献:

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with application [M]. London: Macmillan, 1976
- [2] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1994
- [3] Nebesky L. A new characterization of the maximum of a graph [J]. J Czechoslovak Math, 1981, 31(106): 604-613
- [4] Skoviera M. The maximum genus of graphs of diameter two [J]. Discrete Mathematics, 1991, 87: 175-180
- [5] Skoviera M. The decay number and the maximum genus of a graph [J]. Mathematics Slovaca, 1992, 42(4): 391-406
- [6] Hunglin Fu, Minchu Tsai. The maximum genus of diameter three graphs [J]. Australian J Combinatorics, 1996, 14: 187-197.
- [7] 黄元秋, 刘彦佩. 关于图的最大亏格的一个定理改进 [J]. 应用数学, 1998, 11(2): 109-112

The Upper Embeddability of Graphs with Diameter Three

Liu Duan-feng^{1,2}, Xiao Li²

(1 Faculty of Applied Mathematics Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006 China)

2 Department of Mathematics Science and Computer Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract Suppose G is a simple graph with diameter three. If G does not contain the complete subgraph K_3 of order three, the Betti deficiency Number of G , $\xi(G) \leq 1$, and thus the graph G is upper embeddable.

Key words Simple graph; diameter; Betti deficiency number; upper embeddable; Maximum Genus